ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ ΣΕΛ 253 ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

Α2. ΘΕΩΡΙΑ ΣΕΛ 191 ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

Α3. ΘΕΩΡΙΑ ΣΕΛ 258 ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

Α4. **(α)** Σ **(β)** Σ **(γ)** Λ **(δ)** Λ **(ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \quad \Leftrightarrow$$

$$(z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4 \quad \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}-z-\bar{z}+1+z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4 \quad \Leftrightarrow$$

$$2z\bar{z}+2=4 \quad \Leftrightarrow \quad 2z\bar{z}=2 \quad \Leftrightarrow \quad z\bar{z}=1$$

$$|z|^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|=\sqrt{1} \quad \Leftrightarrow \quad |z|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

Β2.

$|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, $|z_1| = 1$ και $|z_2| = 1$

$|z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 2 \Leftrightarrow$

$|z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow 1 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + 1 = 2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0$ ①

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 =$

$= 1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + 1 \overset{\text{από ①}}{=} 1 + 0 + 1 = 2$

Άρα $|z_1 + z_2|^2 = 2$

$|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$

Β3.

$|w - 5\bar{w}| = 12 \Leftrightarrow$

$|w - 5\bar{w}|^2 = 144 \Leftrightarrow$

$(w-5\bar{w})(\bar{w}-5w)=144 \Leftrightarrow$

$w\bar{w} - 5w^2 - 5\bar{w}^2 + 25\bar{w}w = 144 \Leftrightarrow$

$26w\bar{w} - 5(w^2+\bar{w}^2) = 144 \Leftrightarrow$

$26(x^2+y^2) - 5(2x^2-2y^2) = 144 \Leftrightarrow$

$26(x^2+y^2) - 10(x^2-y^2) = 144 \Leftrightarrow$

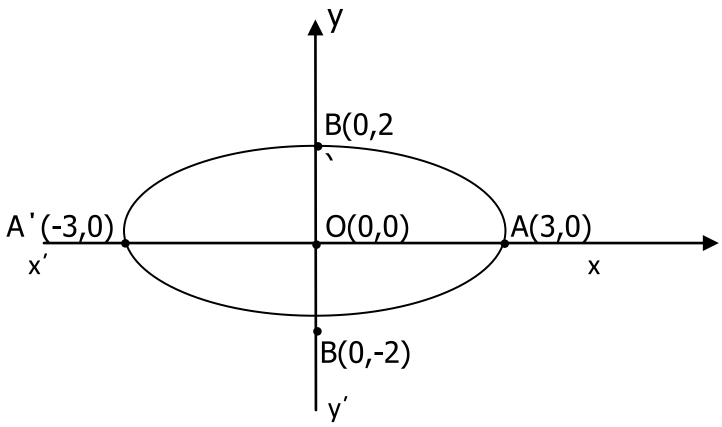
$13(x^2+y^2) - 5(x^2-y^2) = 72 \Leftrightarrow$

$13x^2 + 13y^2 - 5x^2 + 5y^2 = 72 \Leftrightarrow$

$$\frac{8x^2}{72}+\frac{18y^2}{72}=\frac{72}{72}\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η έλλειψη της μορφής

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ με α=3 , β=2



Επειδή α>β άρα μεγάλος άξονας της έλλειψης ο x΄x

Μέγιστη απόσταση από O(0,0) η (OA) = 3

Ελάχιστη απόσταση από O(0,0) η (OB) = 2

B4.

Ισχύει η σχέση:

$$\big||z|-|-w|\big|\le|z-(-w)|\le|z|+|-w| \quad\Leftrightarrow$$

$$\big||z|-|w|\big|\le|z-w|\le|z|+|w| \quad\Leftrightarrow$$

$$\big|1-|w|\big|\le|z-w|\le 1+|w| \quad\Leftrightarrow$$

Είναι $|w|\le 3 \;\Leftrightarrow\; 1+|w|\le 4$

Άρα $|z-w|\le 4$ (μεταβατική ιδιότητα)

Επίσης $|w|\ge z \;\Leftrightarrow\; -|w|\le -z \;\Leftrightarrow\; 1-|w|\le -1$

Οπότε $|w|-1\geq 1$

$\left|1-|w|\right| = |w|-1\geq 1$

Άρα $|z-w|\geq 1$

Επομένως έχουμε τελικά

$$1\leq |z-w|\leq 4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η f(x) = (x-1)ℓnx-1 , x>0 είναι παραγωγίσιμη στο Α = $(0, +\infty)$ με

$f'(x) = \ell nx + \frac{x-1}{x} = \ell nx + 1 - \frac{1}{x}$

Παρατηρούμε ότι f′(1) = ℓn1 +1-1=0.

Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$f''(x) = \frac{1}{x}+0+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε x>0.

Άρα η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι : $0 < x < 1 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x)< f'(1) \Leftrightarrow f'(x)<0$

Άρα η $f\downarrow$ στο (0 , 1]

Και x>1 $f\downarrow \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x)>0$.

Άρα η $f\uparrow$ στο $[1, +\infty)$ (f : συνεχής στο $(0, +\infty)$)

Έστω $\Delta_1=(0 , 1]$ και $\Delta_2= [1 , +\infty)$

με f(1)= (1-1)ℓn1-1= -1.

Η f συνεχής στο Δ_1 και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(\Delta_1)=[f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x))= [-1, +\infty)$ διότι

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}[(x-1)\ell nx-1] = +\infty$ αφού

- $\lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) = -1<0$ και

- $\lim \ell nx = -\infty$

Η f συνεχής στο Δ_2 και γνησίως αύξουσα , άρα $f(\Delta_2) = (\lim\limits_{x\to 1^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) = [-1,+\infty)$

διότι

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} [\, (x-1)\ell nx-1] = +\infty$ αφού

- $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1) = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ και

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ell nx = +\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το

$f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1\,,+\infty)$

Γ2.

Η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$ (1) , x>0 είναι ισοδύναμη με την $\ell nx^{x-1} = \ell ne^{2013} \Leftrightarrow$

$(x-1)\ell nx = 2013 \Leftrightarrow (x-1)\ell nx-1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012$ (2)

Το $2012 \in f(\Delta_1) = [-1, +\infty)$ άρα η (2) έχει μια ρίζα x_1 μοναδική στο

$\Delta_1 = (0, 1]$ αφού f γνησίως φθίνουσα σε αυτό . Επειδή $x_1 \in (0, 1]$ έχουμε $x_1>0$.

Επίσης το $2012 \in f(\Delta_2) = (-1, +\infty)$ άρα η (2) έχει μια ρίζα x_2 μοναδική στο

$\Delta_2 = (1\,, +\infty)$, αφού f γνησίως αύξουσα σε αυτό. Επειδή $x_2 \in (1\,, +\infty)$ έχουμε

$x_2>0$.

Άρα η (2) και ισοδύναμα η (1) έχει δύο θετικές ρίζες.

Γ3.

Από το $Γ_2$ ερώτημα έχουμε ότι

$f(x_1) = 2012$ και $f(x_2) = 2012$.

Η εξίσωση $f'(x) + f(x) = 2012$ είναι ισοδύναμη με την $f'(x)\, e^x + f(x)\, e^x = 2012\, e^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f(x)\, e^x)' - (2012\, e^x)' = 0 \Leftrightarrow [(f(x) - 2012)\, e^x]' = 0$

Θεωρούμε συνάρτηση $φ(x) = e^x (f(x) - 2012)$.

Η φ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subset (0, +\infty)$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1, x_2) \subset (0, +\infty)$.

$φ(x_1) = e^{x_1}(f(x_1) - 2012) = e^{x_1} \cdot 0 = 0\ e^{x_1}(f(x_1) - 2012) = e^{x_1} \cdot 0 = 0$

$φ(x_2) = e^{x_2}(f(x_2) - 2012) = e^{x_2} \cdot 0 = 0$

Άρα $φ(x_1) = φ(x_2)$

Από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $φ'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$

Γ4.

Έχουμε $g(x) = f(x) + 1 = (x-1)\ln x - 1 + 1 \Leftrightarrow g(x) = (x-1)\ln x$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$+$	

Άρα έχουμε $g(x) \geq 0$ για $x \in [1, e]$, οπότε

E(Ω)= $\int_1^e (x-1)\ln x dx = \int_1^e (\frac{x^2}{2}-x)'\ln x dx = [(\frac{x^2}{2}-x)\ln x]_1^e - \int_1^e (\frac{x^2}{2}-x)\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2-2e}{2}$ -

$\int_1^e (\frac{1}{2}x-1)dx = \frac{e^2-2e}{2}$ -$[\frac{x^2}{4}-x]_1^e = \frac{e^2-2e}{2}$ -$(\frac{e^2}{4}-e)$+ $(\frac{1}{4}-1)$= $\frac{e^2-3}{4}\tau.\mu.$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

ΘΕΩΡΩ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ : g(x) = e$\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt + x^2 - x$, x∈$\mathbb{R}^*_+$

Για κάθε x∈$\mathbb{R}^*_+$ ισχύει :

$$\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e} \Leftrightarrow e\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt + x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x=1
- Το 1 εσωτερικό σημείο στο $\mathbb{R}^*_+$
- g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*_+$ άρα και στο $x_0=1 \in \mathbb{R}^*_+$

και $g'(x) = e \cdot f(x^2-x+1)(x^2-x+1)' \Leftrightarrow g'(x) = e \cdot f(x^2-x+1) + 2x - 1$

Άρα και $g'(1) = e \cdot f(1) + 1$

Από θεώρημα Fermat προκύπτει:

$g'(1) = 0 \Leftrightarrow e \cdot f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*_+$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε x∈$\mathbb{R}^*_+$

και $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$ άρα $f(x) < 0$ για κάθε x∈$\mathbb{R}^*_+$

Άρα ισχύει:

$$\ell nx - x = -(\int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt + e)(-f(x)) \Leftrightarrow$$

$$\ell nx - x = f(x)\cdot\int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt + ef(x) \Leftrightarrow \frac{\ell nx - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt + e \quad ①$$

Επειδή:

$$\ell nx - x = \left(\int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt + e\right)f(x) \Leftrightarrow \ f(x) = \frac{\ell nx - x}{\int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt + e}$$

(Ισχύει ℓnx – x <0 για κάθε x∊$\mathbb{R}^*_+$ και f(x)<0 για κάθε x∊$\mathbb{R}^*_+$ Άρα : $\int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt > 0$)

$\frac{\ell nt - t}{f(t)}$ συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

άρα f παραγωγίσιμη και $\int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt + e$ παραγωγίσιμη

Έστω : h(x) = $\int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt$ με x∊$\mathbb{R}^*_+$ και από σχέση ① έχουμε:

$h'(x) = h(x) + e \Leftrightarrow h'(x) - h(x) = e \Leftrightarrow e^{-x} h'(x) - e^{-x} h(x) = e^{1-x} \Leftrightarrow$

$(e^{-x} h(x))' = (-e^{1-x})' \Leftrightarrow e^{-x} h(x) = e^{-x} h'(x) + c$

Για x=1 έχουμε $e^{-1} h(1) = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$

Και άρα : $e^{-x} h(x) = -e^{1-x} + 1 \Leftrightarrow h(x) = e^x - e \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt = e^x - e$

Παραγωγίζοντας προκύπτει:

$\frac{\ell nx - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ell nx - x)$ x∊$\mathbb{R}^*_+$

Δ2.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{1}{u^2}\eta\mu u \frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u} =$$

$$= \lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u}{u^2} = \left(\frac{0}{0}\right)(DLH)\lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Δ3.

$\ell nx \leq x-1$

$x-1-\ell nx \geq 0$ (2)

$F'(x)=f(x)$

$F''(x)=f'(x)=\left(\frac{\ell nx - x}{e^x}\right)' = \frac{(\ell nx - x)'\cdot e^x - (\ell nx - x)(e^x)'}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} + x - \ell nx - 1}{e^x} =$

$\frac{e^x(\frac{1}{x} - 1 - \ell nx + x)}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} + x - \ell nx - 1}{e^x}$

Όμως:

$e^x > 0$

$\frac{1}{x} > 0$ αφού $x>0$

$x-\ell nx-1 \geq 0$ από (2)

Οπότε $\frac{\frac{1}{x} + x - \ell nx - 1}{e^x} > 0$

Άρα η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, αφού $F''(x)>0$.

Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[x,2x]$ και $[2x,3x]$.

(Αφού $x>0$ ισχύει $x<2x<3x$)

- Η F είναι συνεχής στο [x,2x]

Η F είναι παραγωγίσιμη στο (x,2x), άρα υπάρχει $\xi_1 \in$ (x,2x) τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_1)= \frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}=\frac{F(2x)-F(x)}{x} \quad (3)$$

- Η F είναι συνεχής στο [2x,3x]

Η F είναι παραγωγίσιμη στο(2x,3x) , άρα υπάρχει $\xi_2 \in$ (2x,3x) τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x}\ \frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x} \quad (4)$$

F′ γνησίως αύξουσα στο (0, $+\infty$) άρα

$\xi_1<\xi_2 \Leftrightarrow F'(\xi_1)<F'(\xi_2)$ (από (3) και (4))

$$\Leftrightarrow \frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(2x)}{x} \quad (x>0)$$

$\Leftrightarrow F(2x) - F(x)< F(3x) - F(2x)$

$\Leftrightarrow 2\,F(2x) < F(3x) +F(x)$

$\Leftrightarrow F(3x) +F(x) > 2\,F(2x)$

Δ4.

$F(\beta)+F(3\beta)= 2F(\xi) \Leftrightarrow 2F(\xi)- F(\beta)-F(3\beta)=0$

Έστω η συνάρτηση

$G(x)= 2F(x)- F(\beta)-F(3\beta)$

- G συνεχής στο [β,2β]
- $G(\beta) = F(\beta)-F(3\beta)>0$

$G(2\beta) = 2F(2\beta)- F(\beta)-F(3\beta)<0$ (από (Δ_3))

Ισχύει $F'(x)=f(x)<0$, άρα F γνησίως φθίνουσα στο $\Re^*_+$ και αφού β>0

$\beta<3\beta \Leftrightarrow F(\beta)>F(3\beta)$

Άρα από Θεώρημα Bolzano: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\beta,2\beta)$ ώστε

$G(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta)+F(3\beta)$